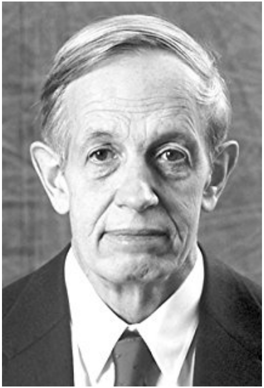
(Evolucijska) teorija iger

Barbara Ikica

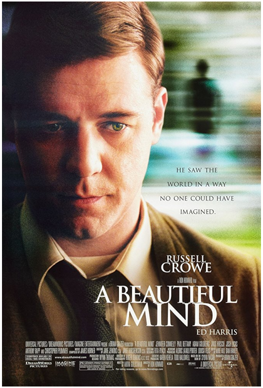
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

21. 5. 2018

John Forbes Nash Jr. (1928–2015)



(a) John Forbes Nash Jr.



(b) A Beautiful Mind

Nobelove nagrade za delo v teoriji iger

- 1970 – Paul A. Samuelson,
- 1972 – Kenneth J. Arrow,
- 1994 – Reinhard Selten, John F. Nash Jr., John C. Harsanyi,
- 1995 – Robert E. Lucas Jr.,
- 1996 – William Vickrey,
- 2005 – Thomas C. Schelling, Robert J. Aumann
- 2007 – Eric S. Maskin, Leonid Hurwicz, Roger B. Myerson
- 2009 – Elinor C. Ostrom,
- 2012 – Alvin E. Roth, Lloyd S. Shapley
- 2014 – Jean Tirole,
- 2016 – Oliver Hart, Bengt Holmström,
- 2017 – Richard H. Thaler

Kaj je teorija iger?

Teorija iger

Veja uporabne matematike, ki se ukvarja z modeliranjem interakcij (*iger*) med (racionalnimi) posamezniki (*igralci*).

Zgodovina

Antični časi

Sokratov opis misli vojaka na bojni liniji v bitki pri Deliju v Platonovih delih *Lahes* in *Simpozij*.

Zgodovina

Špansko osvajanje Amerike

Španski konkvistador Hernán Cortés proti Aztekom v Mehiki.

Zgodovina

Začetki teorije iger kot matematične veje

- 1713 – minimaks rešitev igre s kartami le her (Charles Waldegrave),

Zgodovina

Začetki teorije iger kot matematične veje

- 1713 – minimaks rešitev igre s kartami le her (Charles Waldegrave),
- 1787 – analiza pričakovanega vedenja države pod različnimi davčnimi sistemi (James Madison),

Zgodovina

Začetki teorije iger kot matematične veje

- 1713 – minimaks rešitev igre s kartami le her (Charles Waldegrave),
- 1787 – analiza pričakovanega vedenja države pod različnimi davčnimi sistemi (James Madison),
- 1838 – obravnava duopola in rešitev, ki je poseben primer Nashevega ravnovesja (Antoine Augustin Cournot),

Zgodovina

Začetki teorije iger kot matematične veje

- 1713 – minimaks rešitev igre s kartami le her (Charles Waldegrave),
- 1787 – analiza pričakovanega vedenja države pod različnimi davčnimi sistemi (James Madison),
- 1838 – obravnava duopola in rešitev, ki je poseben primer Nashevega ravnovesja (Antoine Augustin Cournot),
- 1913 – obstoj optimalne strategije v šahu (Ernst Zermelo),

Zgodovina

Začetki teorije iger kot matematične veje

- 1713 – minimaks rešitev igre s kartami le her (Charles Waldegrave),
- 1787 – analiza pričakovanega vedenja države pod različnimi davčnimi sistemi (James Madison),
- 1838 – obravnava duopola in rešitev, ki je poseben primer Nashevega ravnovesja (Antoine Augustin Cournot),
- 1913 – obstoj optimalne strategije v šahu (Ernst Zermelo),
- 1938 – dokaz obstoja zmagovalne strategije z uporabo Brouwerjevega izreka o fiksni točki (Frederik Zeuthen),

Zgodovina

Začetki teorije iger kot matematične veje

- 1713 – minimaks rešitev igre s kartami le her (Charles Waldegrave),
- 1787 – analiza pričakovanega vedenja države pod različnimi davčnimi sistemi (James Madison),
- 1838 – obravnava duopola in rešitev, ki je poseben primer Nashevega ravnovesja (Antoine Augustin Cournot),
- 1913 – obstoj optimalne strategije v šahu (Ernst Zermelo),
- 1938 – dokaz obstoja zmagovalne strategije z uporabo Brouwerjevega izreka o fiksni točki (Frederik Zeuthen),
- 1938 – dokaz izreka o minimaksu za igre z ničelno vsoto med dvema igralcema v primeru simetrične plačilne matrike (Émile Borel)

Zgodovina

John von Neumann

- 1928 – objava članka z dokazom izreka o minimaksu z uporabo Brouwerjevega izreka o fiksni točki na zveznih preslikavah v kompaktne konveksne množice,

Zgodovina

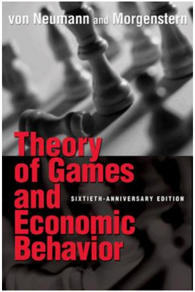
John von Neumann

- 1928 – objava članka z dokazom izreka o minimaksu z uporabo Brouwerjevega izreka o fiksni točki na zveznih preslikavah v kompaktne konveksne množice,
- 1944 – objava knjige *Theory of Games and Economic Behavior* s soavtorjem Oskarjem Morgensternom

Zgodovina

John von Neumann

- 1928 – objava članka z dokazom izreka o minimaksu z uporabo Brouwerjevega izreka o fiksni točki na zveznih preslikavah v kompaktne konveksne množice,
- 1944 – objava knjige *Theory of Games and Economic Behavior* s soavtorjem Oskarjem Morgensternom

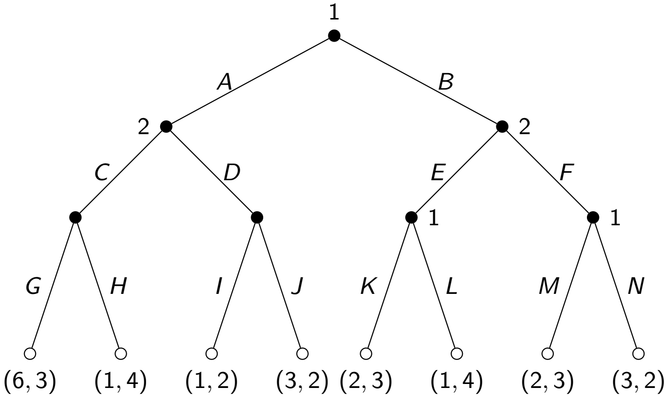


Vrste iger

- kooperativne / **nekooperativne**,

Vrste iger

- kooperativne / **nekooperativne**,
- zaporedne (odločitvena drevesa)



Vrste iger

- kooperativne / **nekooperativne**,
- zaporedne (odločitvena drevesa) / **vzporedne** (plačilne matrike),

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} (1,2) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Vrste iger

- kooperativne / **nekooperativne**,
- zaporedne (odločitvena drevesa) / **vzporedne** (plačilne matrike),
- asimetrične

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} (1,2) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{bmatrix} \end{array}$$

Vrste iger

- kooperativne / **nekooperativne**,
- zaporedne (odločitvena drevesa) / **vzporedne** (plačilne matrike),
- asimetrične / **simetrične**,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} (-1,-1) & (-10,0) \\ (0,-10) & (-6,-6) \end{bmatrix} \end{array}$$

Zapornikova dilema

Vrste iger

- kooperativne / **nekooperativne**,
- zaporedne (odločitvena drevesa) / **vzporedne** (plačilne matrike),
- asimetrične / **simetrične**,
- s popolno informacijo / **z nepopolno informacijo**,

Vrste iger

- kooperativne / **nekooperativne**,
- zaporedne (odločitvena drevesa) / **vzporedne** (plačilne matrike),
- asimetrične / **simetrične**,
- s popolno informacijo / **z nepopolno informacijo**,
- z ničelno vsoto

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} (-1,1) & (3,-3) \\ (0,0) & (-2,2) \end{bmatrix} \end{array}$$

Vrste iger

- kooperativne / **nekooperativne**,
- zaporedne (odločitvena drevesa) / **vzporedne** (plačilne matrike),
- asimetrične / **simetrične**,
- s popolno informacijo / **z nepopolno informacijo**,
- z ničelno vsoto / z neničelno vsoto

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} (-1,-1) & (-10,0) \\ (0,-10) & (-6,-6) \end{bmatrix} \end{array}$$

Zapornikova dilema

Osnovni pojmi

Igra v strateški (normalni) obliki (I, S, U)

- *množica igralcev* $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$,

Osnovni pojmi

Igra v strateški (normalni) obliki (I, S, U)

- *množica igralcev* $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$,
- *množice čistih strategij* S_i,

Osnovni pojmi

Igra v strateški (normalni) obliki (I, S, U)

- *množica igralcev* $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$,
- *množice čistih strategij* S_i,
- *plačilne funkcije* $u_i : S \to \mathbb{R}$;
  $u_i(\boldsymbol{s})$ = izkupiček i-tega igralca, če igralci odigrajo profil strategij $\boldsymbol{s} = (s_j)_{j=1}^n$.

Osnovni pojmi

Mešana strategija i-tega igralca $\boldsymbol{\sigma}_i$

Verjetnostna porazdelitev na S_i (neodvisna od verjetnostnih porazdelitev drugih igralcev),

$$\boldsymbol{\sigma}_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \ldots, \sigma_{i|S_i|}), \quad \sigma_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{|S_i|} \sigma_{ij} = 1,$$

kjer je $\sigma_{ij} := \boldsymbol{\sigma}_i(s_{ij})$ verjetnost, s katero mešana strategija $\boldsymbol{\sigma}_i$ zavzame čisto strategijo $s_{ij} \in S_i$.

Osnovni pojmi

Razširitev plačilne funkcije

Vrednost u_i na profilu mešanih strategij $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_n)$ definirajmo kot izkupiček, ki ga i-ti igralec lahko pričakuje glede na profil $\boldsymbol{\sigma}$, tj.

$$u_i(\boldsymbol{\sigma}) := \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \left(\prod_{j=1}^{n} \boldsymbol{\sigma}_j(s_j) \right) u_i(\boldsymbol{s}).$$

Osnovni pojmi

Minimaks

Najboljši odziv na tisti profil strategij $\boldsymbol{\sigma}$, ki minimizira pričakovani dobiček igralca.

Osnovni pojmi

Minimaks

Najboljši odziv na tisti profil strategij $\boldsymbol{\sigma}$, ki minimizira pričakovani dobiček igralca.

Najboljši odziv

Strategija $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i \in \Sigma_i$ je *najboljši odziv* i-tega igralca na profil strategij $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i})$, če za vsak $\boldsymbol{\sigma'}_i \in \Sigma_i$ velja

$$u_i(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i}) \geq u_i(\boldsymbol{\sigma'}_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i}).$$

Osnovni pojmi

Minimaks

Najboljši odziv na tisti profil strategij $\boldsymbol{\sigma}$, ki minimizira pričakovani dobiček igralca.

Najboljši odziv

Strategija $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i \in \Sigma_i$ je *najboljši odziv* i-tega igralca na profil strategij $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i})$, če za vsak $\boldsymbol{\sigma'}_i \in \Sigma_i$ velja

$$u_i(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i}) \geq u_i(\boldsymbol{\sigma'}_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i}).$$

V igrah z ničelno vsoto lahko zmeraj poiščemo minimaks.

Zgodovina

CARNEGIE INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SCHENLEY PARK
PITTSBURGH 13, PENNSYLVANIA

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
COLLEGE OF ENGINEERING AND SCIENCE

February 11, 1948

Professor S. Lefschetz
Department of Mathematics
Princeton University
Princeton, N. J.

Dear Professor Lefschetz:

This is to recommend Mr. John F. Nash, Jr. who has applied for entrance to the graduate college at Princeton.

Mr. Nash is nineteen years old and is graduating from Carnegie Tech in June. He is a mathematical genius.

Yours sincerely,

Richard J. Duffin

RJD:hl

Zgodovina

John Forbes Nash Jr.

- 1949 – v svoji doktorski disertaciji z naslovom *Non-Cooperative Games* vpeljal koncept t. i. Nashevega ravnovesja in dokazal, da obstaja (tudi) za vsako nekooperativno igro z neničelno vsoto med n igralci (in ne le za igre z ničelno vsoto med dvema igralcema)

Zgodovina

John Forbes Nash Jr.

- 1949 – v svoji doktorski disertaciji z naslovom *Non-Cooperative Games* vpeljal koncept t. i. Nashevega ravnovesja in dokazal, da obstaja (tudi) za vsako nekooperativno igro z neničelno vsoto med n igralci (in ne le za igre z ničelno vsoto med dvema igralcema)
- *Nashevo ravnovesje* je profil strategij, v katerem je strategija vsakega igralca najboljši odziv na strategije drugih igralcev.

Zgodovina

John Forbes Nash Jr.

- 1949 – v svoji doktorski disertaciji z naslovom *Non-Cooperative Games* vpeljal koncept t. i. Nashevega ravnovesja in dokazal, da obstaja (tudi) za vsako nekooperativno igro z neničelno vsoto med n igralci (in ne le za igre z ničelno vsoto med dvema igralcema)
- *Nashevo ravnovesje* je profil strategij, v katerem je strategija vsakega igralca najboljši odziv na strategije drugih igralcev.
- Profil mešanih strategij $\boldsymbol{\sigma}^*$ je *Nashevo ravnovesje*, če so za vsakega igralca za vse strategije $\boldsymbol{\sigma}_i \in \Sigma_i$ izpolnjene neenakosti

$$u_i(\boldsymbol{\sigma}_i^*, \boldsymbol{\sigma}_{-i}^*) \geq u_i(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i}^*).$$

Zgodovina

Evolucijska teorija iger

- 1930 – razlaga evolucije (in stabilnosti) razmerja spolov (R. A. Fisher),

Zgodovina

Evolucijska teorija iger

- 1930 – razlaga evolucije (in stabilnosti) razmerja spolov (R. A. Fisher),
- 1973 – članek *The Logic of Animal Conflict* (John Maynard Smith, George R. Price),

Zgodovina

Evolucijska teorija iger

- 1930 – razlaga evolucije (in stabilnosti) razmerja spolov (R. A. Fisher),
- 1973 – članek *The Logic of Animal Conflict* (John Maynard Smith, George R. Price),
- 1982 – knjiga *Evolution and the Theory of Games* (John Maynard Smith)

Teorija iger v replikatorski dinamiki

Kako vključimo igro?

1. i-ta vrsta (x_i) $\rightsquigarrow$ $\boldsymbol{p}^i$

Teorija iger v replikatorski dinamiki

Kako vključimo igro?

1. i-ta vrsta (x_i) $\rightsquigarrow$ $\boldsymbol{p}^i$
2. $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}, a_{ij} = \boldsymbol{p}^i \cdot U\boldsymbol{p}^j$

Teorija iger v replikatorski dinamiki

Kako vključimo igro?

1. i-ta vrsta $(x_i) \rightsquigarrow \boldsymbol{p}^i$
2. $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n, a_{ij} = \boldsymbol{p}^i \cdot U\boldsymbol{p}^j$
3. $f_i(\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x})_i = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{p}^i \cdot U\boldsymbol{p}^j x_j$

Teorija iger v replikatorski dinamiki

Kako vključimo igro?

1. i-ta vrsta (x_i) $\rightsquigarrow$ $\boldsymbol{p}^i$
2. $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, $a_{ij} = \boldsymbol{p}^i \cdot U\boldsymbol{p}^j$
3. $f_i(\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x})_i = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{p}^i \cdot U\boldsymbol{p}^j x_j$

Linearna replikatorska enačba

$$\boxed{\dot{x}_i = x_i\big((A\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{x}\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n}$$

Povprečna reprodukcijska sposobnost: $\bar{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{x}$

Igra Kamen, škarje, papir

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} K & S & P \end{array} \\ \begin{array}{c} K \\ S \\ P \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1+\varepsilon & -1 \\ -1 & 0 & 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Zgodovina

Uporaba teorije iger v socioloških in političnih vedah

- 1950 – zapornikova dilema kot model za raziskovanje globalnih strategij uporabe jedrskega orožja (Merrill M. Flood, Melvin Dresher za RAND Corporation),

Zgodovina

Uporaba teorije iger v socioloških in političnih vedah

- 1950 – zapornikova dilema kot model za raziskovanje globalnih strategij uporabe jedrskega orožja (Merrill M. Flood, Melvin Dresher za RAND Corporation),
- 1962 – Kubanska raketna kriza v času predsedovanja Johna F. Kennedyja,

Zgodovina

Uporaba teorije iger v socioloških in političnih vedah

- 1950 – zapornikova dilema kot model za raziskovanje globalnih strategij uporabe jedrskega orožja (Merrill M. Flood, Melvin Dresher za RAND Corporation),
- 1962 – Kubanska raketna kriza v času predsedovanja Johna F. Kennedyja,
- 1984 – izdaja knjige *The Evolution of Cooperation* (Robert Axelrod); sodelovanje na podlagi vzajemnosti se lahko vzpostavi in ohrani v primeru dolgotrajnih interakcij

Uporaba teorije iger danes

- ekonomija (konkurenčnost, trgovanje, obnašanje potrošnikov),
- politične vede (stabilnost političnih sistemov, politične kampanje, volitve, vojaške taktike),
- psihologija in sociologija (modeli učenja, širjenja kultur),
- logika in računalništvo,
- medicina (epidemiologija),
- biologija (evolucija, konflikti, altruizem)